数理解析研究所講究録
641巻 1988年 198-215

巾零共役類の幾何

東北大理　谷崎俊之 (Toshiyuki Tanisaki)

Lie群 $G=GL(n,\mathbb{C})$ はその Lie環 $\mathfrak{g}=M(n,\mathbb{C})$ に自然に作用する(随伴作用, $g\cdot x=gxg^{-1}$ $g\in G, x\in X$)。その軌道(共役類)の代表系として Jordan標準形がとれることは線型代数の基本事項である。本稿では, 巾零共役類 ── 固有値が全て0であるような行列からなる共役類 ── について考察する。以下の内容は次のとおり。

§1. 基本事項

§2. 巾零共役類の閉包の定義方程式

§3. 対称群の表現と巾零共役類

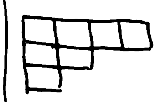
§1では、分類, 閉包の包含関係などのよく知られていることの復習をする。§2では巾零共役類の閉包の定義idealの生成系に関するある予想を述べる。§3では巾零共役類から自然に得られる対称群の表現について述べる。§2,3は[DP],[T1]の解説である。なお $GL(n,\mathbb{C})$ 以外のreductiveな代数群についても全く同じ問題が考えられるが, これらについても知られている結果を折に

ついて述べることにする。

本論に入る前に，分割に関する基本事項を述べておく。自然数 n に対して，

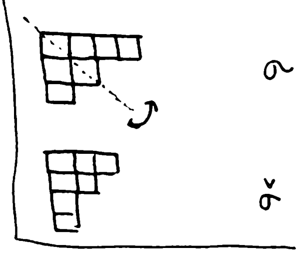
$$P(n)=\{(\sigma_i)_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mid \sigma_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ \sigma_i\geq\sigma_{i+1},\ \sum_{i\geq 0}\sigma_i=n\}$$

の元を n の分割と呼ぶ。例えば $\sigma_0=4,\ \sigma_1=2,\ \sigma_2=1,\ \sigma_i=0\ (i\geq 3)$ は 7 の分割を与える。これを以下 $(4,2,1)$ とかく（後ろに続く 0 は省略）。分割を視覚的にあらわすのには Young 図形が用いられる。これは第 i 行 $(i\geq 0)$ に σ_i 個の正方形を左端をそろえて並べたもので，例えば $(4,2,1)$ に対応する Young 図形は右図になる。



$(4,2,1)$

$\sigma=(\sigma_i)\in P(n)$ について，その双対分割 $\check{\sigma}=(\tau_i)\in P(n)$ を，$\tau_i=\#\{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \sigma_j>i\}$ で定める。Young 図形の言葉では，その"転置"が，双対をとる操作に対応する。$\sigma=(4,2,1)$ のとき右図により $\check{\sigma}=(3,2,1,1)$ となる。



§1. 基本事項

以下 $G=GL(n,\mathbb{C})$，$\mathfrak{g}=M(n,\mathbb{C})$ とする。また $\mathfrak{g}$ 中のべき零行列の全体を $\mathcal{N}$ とする。すなわち

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{x\in\mathfrak{g} \mid x \text{ の固有値はすべて } 0\} \\ &= \{x\in\mathfrak{g} \mid \det(tI-x)=t^n\} \\ &= \{x\in\mathfrak{g} \mid x^n=0\}\end{aligned}$$

群 G は $\mathfrak{g}$ に $g\cdot x=gxg^{-1}\ (g\in G,\ x\in\mathfrak{g})$ で作用し，$\mathcal{N}$ は G-不変な

部分集合になる。以下で問題にするのは $\mathcal{N}$ 中の G-軌道である。

$\boxed{1.1}$ 分類

Jordan標準形の理論より、

$$\{\mathcal{N}\text{中の}G\text{-軌道}\} \xrightarrow[\sim]{1:1} P(n), \qquad \mathcal{O}_\sigma \longleftrightarrow \check{\sigma} = (\sigma_i)$$

但し $\mathcal{O}_\sigma \ni \begin{bmatrix} J_{\sigma_0} & & 0 \\ & J_{\sigma_1} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$ $\left(J_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \in M(m, \mathbb{C}) \right)$。$\mathcal{O}_\sigma$ の代表元のとり方は Jordan 標準形の他に次のものもある。

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & K_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & K_1 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & K_2 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right] \end{array}$$

ここで $\check{\sigma} = (\tau_i)$

$$K_j = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & \end{bmatrix} \in M(\tau_j, \tau_{j+1}, \mathbb{C})$$

両者は置換行列による共役で移りあうので、同じといえば同じだが、固定部分群の計算などには後者のほうが扱い易い。

$\boxed{1.2}$ 次元その他

次の事実は直接計算から容易にわかる。

「**Lemma 1** $\sigma = (\sigma_i) \in P(n)$, $\tau = \check{\sigma} = (\tau_i)$, $r_j = \#\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \sigma_i = j\}$ とおく。

$x \in \mathcal{O}_\sigma$ とするとき、

(i) $G^x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ の次元は

$$\sum_{i \geq 0} \tau_i^2 = \sum_{i \geq 0} (2i+1)\sigma_i \quad 。$$

(ii) G^x は次のような2つの群 H, U の半直積 $H \ltimes U$。
U は連結巾単群（$\left\{\begin{bmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ と共役の閉部分群）。H は

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_1 & & & & & \\ & \begin{matrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{matrix} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \overbrace{\begin{matrix} A_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{matrix}}^{k \text{ blocks}} & & \\ & 0 & & & \ddots & \end{bmatrix} \;\middle|\; A_k \in GL(r_k, \mathbb{C}) \right\} \simeq \prod_{k\geq 1} GL(r_k, \mathbb{C}) = \prod_{k \geq 0} GL(r_k - r_{k+1}, \mathbb{C})$$

と共役な G の部分群。」

$O_\sigma \simeq G/G^x$ $(x \in O_\sigma)$ なので $\dim O_\sigma = \dim G - \dim G^x = n^2 - \dim G^x$
より，O_σ の次元も計算できる。

1.3 閉包の包含関係

$\sigma \in P(n)$ とする。O_σ は G 不変なので，その閉包 $\overline{O_\sigma}$ も G 不変である。
また定義から明らかに $\mathcal{N}$ は閉集合なので，$\overline{O_\sigma}$ は幾つかの $O_{\sigma'}$ $(\sigma' \in P(n))$
の合併集合になる。この σ' の集合を記述するのが目的である。

$k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ のとき $P_k(\sigma) := \sum_{i \geq n-k} \sigma_i$ $\quad (\sigma = (\sigma_i) \in P(n))$ とおき，$P(n)$ 上の
半順序 $\geqq$ を次で定める。$\sigma = (\sigma_i)$，$\sigma' = (\sigma'_i)$ が $P(n)$ の元のとき

$$\sigma \geqq \sigma' \iff P_k(\sigma) \leqq P_k(\sigma') \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$
$$\iff \sum_{i=0}^{l} \sigma_i \geqq \sum_{i=0}^{l} \sigma'_i \quad (\forall l \in \mathbb{Z}_{\geq 0})。$$

「<u>Lemma 2</u>　$\sigma, \sigma' \in P(n)$ のとき　$\overline{O_\sigma} \supset O_{\sigma'} \iff \sigma \geqq \sigma'$」

§2 以下の議論とも関係するので、証明を簡単にみておこう。

Jordan標準形の計算方法は幾つかあるが、その一つに単因子を用いる方法がある。これは次のように述べることができる。

“$x\in\mathfrak{g}$ に対して $tI-x\in M(n,\mathbb{C}[t])$ の k次小行列式の全体を考えて、その(tの多項式としての)最大公約多項式を $f_k(x,t)$ とすると、

$$x\in O_\alpha \iff f_k(x,t)=t^{p_\alpha(k)} \quad (k=1,2,\cdots,n)。”$$

よって $x\in O_\alpha$ ならば、行列 $tI-x$ の任意の k次小行列式は $t^{p_\alpha(k)}$ でわりきれる。つまり tで展開したときの t^m の係数 $=0$ $(m<p_\alpha(k))$。

これは x の成分 x_{ij} に関する代数的関係式なので、$\overline{O_\alpha}$ の任意の元 y についても同じ事が成立する。すなわち [$y\in\overline{O_\alpha} \Rightarrow t^{p_\alpha(k)} \mid f_k(y,t)$]。

従って $\overline{O_\alpha}\supset O_{\alpha'} \Rightarrow t^{p_\alpha(k)} \mid t^{p_{\alpha'}(k)} \quad (\forall k=1,\cdots,n)$

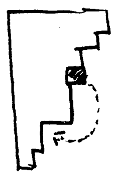
$\iff p_\alpha(k)\leqq p_{\alpha'}(k) \quad (\forall k=1,\cdots,n)$

$\Rightarrow \alpha\geqq\alpha'$

そこで逆方向の [$\alpha\geqq\alpha' \Rightarrow \overline{O_\alpha}\supset O_{\alpha'}$] を示せばよい。ここで α,α' は次の条件をみたすとしてよい。

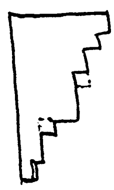
(イ) $\alpha>\alpha'$, [$\alpha\geqq\alpha_1\geqq\alpha' \Rightarrow \alpha_1=\alpha$ or $\alpha_1=\alpha'$]

これは次と同値であることがわかる。



α

$$(\text{ロ})\ \begin{cases} \exists i, \exists j \text{ s.t.} \\ i<j \\ \alpha_{i+1}=\cdots=\alpha_{j-1}=\alpha_i-1 \\ \alpha_j<\alpha_i-1 \\ \alpha'_i=\alpha_i-1,\ \alpha'_j=\alpha_j+1,\ \alpha'_k=\alpha_k\ (k\neq i,j) \end{cases}$$



α'

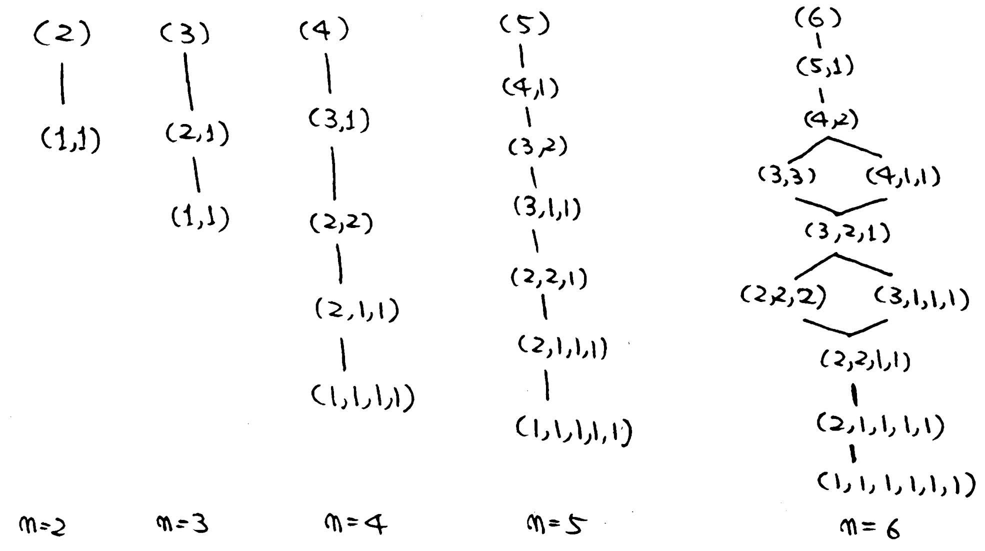
この条件のもとに $\overline{O_\alpha} \supset O_{\alpha'}$ を示す。$\varepsilon \in \mathbb{C}$ に対して

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \boxed{J_{\sigma'_0}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{J_{\sigma'_i}} & \boxed{R_\varepsilon} & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{J_{\sigma'_j}} \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad R_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \\ & \boxed{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

とおくと明らかに $A_0 \in O_{\alpha'}$。また簡単な計算により $A_\varepsilon \in O_\alpha$ $(\varepsilon \neq 0)$。
よって主張は明らか。■

注意　上の証明から O_α の閉包 $\overline{O_\alpha}$ は, classical topology, Zariski topology のいずれで考えても同じであることがわかる（これは代数幾何の一般論からもわかる）。特に $\overline{O_\alpha}$ は affine 代数多様体になる。

例　$P(n)$ 上の半順序 $\geqq$ を n が小さいときに書き下してみる



1.4 $\overline{O_\alpha}$ の代数多様体としての性質

ここで詳しく述べることは差し控えるが，reductive な代数群の表現論において，巾零共役類の閉包の代数多様体としての性質，特にその singularity の"悪さ"を評価する事は重要な問題である。またここで現われる singularity 自体も，特異点理論において興味深い対象である。

今我々が扱っている $GL(n,\mathbb{C})$ の場合には次が知られている。

「定理 3.（Kraft–Procesi [KP1]）
$\overline{O_\alpha}$ は normal，Cohen-MaCaulay で rational singularity をもつ。」

その他 [KP2] でも $\overline{O_\alpha}$ の singularity に関する考察がなされている。

1.5 $GL(n,\mathbb{C})$ 以外の場合

$GL(n,\mathbb{C})$ 以外の，$\mathbb{C}$ 上の reductive な連結代数群に対しても，その Lie 環中の巾零共役類について全く同じ問題が考えられる。これに関して知られていることをまとめておく。

(a) 分類　古典群については §1.1 で述べたのと同様の，一種の Jordan 標準形の理論がある（例えば [W]，[H] を参照）。例外群を含めた一般の場合もある程度の一般論（Dynkin–Kostant 理論 [D]，[Ko1] その他 [BC] も参照）はあり，例えば巾零共役類の数が有限であることは，これからもわかるが，実際の分類は case-by-case で行なわれ，例外群の

場合の表は，[D]にある。ついでに[D]の表のミスプリントを指摘しておく。

① E_8 で characteristic $2\,2\,0\,0\,\underset{0}{1}\,1\,1$ をもつ巾零共役類は存在しない。

② E_8 で、$0\,2\,0\,0\,\underset{0}{0}\,0\,0$ の minimal including regular subalgebra は $[A_3+2A_1]''$, $3A_2$, $D_4(a_1)$，$1\,0\,0\,0\,\underset{0}{0}\,1\,0$ のそれは $[A_3+2A_1]'$ であり，表では逆になっている。

(b) 代表元の固定部分群　古典群の場合は容易に直接計算できる。一般の場合は，固定部分群を HU と Levi 分解 (H : reductive，U : unipotent) したときの，$\dim U$ 及び $H^\circ=$ (H の単位元を含む連結成分) は比較的容易に計算できるが，有限群 H/H° がどうなるかをみるのは簡単ではない。これに関しては庄司[S1]，水野[M1,2]，Alekseevsky [A] に表がある。Elkington [J. Algebra 23 (1972) 137–163] は間違いが多いので要注意。

(c) 閉包の包含関係　古典群の場合は例えば[H]にある。G_2 のときは，対応して定まる 5個の巾零共役類の間の順序関係が全順序になり，共役類の次元をみればわかる。F_4 は [S2]，E_6, E_7, E_8 は [M2] にある。

(d) 共役類の閉包の正規性　§1.4 で述べたように $GL(n,\mathbb{C})$ の場合巾零共役類の閉包は normal variety であるが，一般には normal でない場合もあり、いつ normal かという問題は open problem である。[KP3] に部分的結果はある。また巾零共役類の閉包の normalization が bijective になるための条件は知られている ([BS; P595] 参照)。

§2. 巾零共役類の閉包の定義方程式

$\boxed{2.1}$ **予想**　$\mathfrak{g}=M(n,\mathbb{C})$ 上の多項式関数全体のなす $\mathbb{C}$-algebra を $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ とかく。これは $x=(x_{ij})\in M(n,\mathbb{C})$ の各成分 x_{ij} に関する n^2 変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_{ij}\mid 1\leqq i,j\leqq n]$ と同一視される。$\sigma\in P(n)$ に対して $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の部分集合 F_σ を次のように定める。

$$F_\sigma=\left\{\begin{array}{l} tI-(x_{ij}) \text{ の } k \text{ 次小行列式を} \\ t \text{ で展開したときの } t^m \text{ の係数} \end{array}\;\middle|\; \begin{array}{l} k=1,2,3,\cdots,n \\ m<p_k(\sigma) \end{array}\right\}$$

Lemma 2 の証明より、$y\in\mathfrak{g}$ のとき

$$(*)\quad y\in\overline{O_\sigma}\iff f(y)=0\quad(\forall f\in F_\sigma)$$

がわかる。$\mathfrak{g}$ の部分集合 S に対して $I(S)=\{f\in\mathbb{C}[\mathfrak{g}]\mid f(S)=0\}$ とおく。

「**予想**（[T1]）$I(\overline{O_\sigma})$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の ideal として F_σ で生成される。」

F_σ の生成する $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の ideal を J_σ とするとき，明らかに $J_\sigma\subset I(\overline{O_\sigma})$。また Hilbert の零点定理により $\sqrt{J_\sigma}:=\{f\in\mathbb{C}[\mathfrak{g}]\mid f^m\in J_\sigma\ (\exists m\geqq 0)\}=I(\overline{O_\sigma})$

なお De Concini-Procesi [DP] は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の別の有限部分集合 F'_σ で (*) と同様の性質をみたすものを与え，やはり $I(\overline{O_\sigma})$ は F'_σ で生成されるだろうと予想している。

さて一般に，$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の部分集合 F に対して，$Y=\{y\in\mathfrak{g} \mid f(y)=0\ (\forall f\in F)\}$ が non-singular な連結代数多様体で $\dim Y = m$ ならば，$I(Y)$ が F で生成されるための条件は

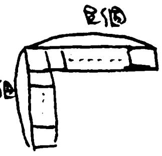
$$\left[\ \langle (df)_y \mid f\in F\rangle_{\mathbb{C}} \text{ は } (T_y\mathfrak{g})^* \text{ の } (n-m) \text{ 次元部分空間} \qquad (\forall y\in Y)\ \right]$$

となることが知られている（Jacobian criterion）。$\overline{O_\sigma}$ は non-singular とは限らないので，これを直接使うことはできないが，次はわかる。

「**Lemma 4** $\langle (df)_y \mid f\in F_\sigma\rangle_{\mathbb{C}}$ は $(T_y\mathfrak{g})^*$ の $\mathrm{codim}\,\overline{O_\sigma}$ 次元の部分空間になる（$\forall y\in O_\sigma$）。」

（証明）F_σ の生成する ideal I_σ は G-不変なので O_σ のある一点 y でみればよい。よって y を Jordan 標準形（type σ）としてよい。この場合には直接計算で容易に確かめることができる。■

$\boxed{2.2}$ 特別な場合 $\sigma=(k,\overbrace{1,1,\cdots,1}^{n-k\text{個}})$ のときに予想を証明する。



$$\begin{cases} F_1=\{(x_{ij}) \text{ の } k \text{ 次小行列式}\} \\ F_2=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_{k-1}\} \qquad \det(tI-(x_{ij}))=t^n+\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(x_{ij})\,t^{n-m} \\ F=F_1\cup F_2 \end{cases}$$

とおく。$F_\sigma \supset F$ であるが，F_σ の生成する ideal と F の生成する ideal は一致するので，F を考えればよい。F, F_1 の生成する ideal をそれぞれ I, I_1 とおく。また $R=\mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I_1$，$A=\mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I = R/(\bar\varphi_1,\cdots,\bar\varphi_{k-1})$ とおく。

Aが整域になることを示すのが目的である。

$Z=\{z\in\mathfrak{g}\mid f(z)=0\ (\forall f\in F_1)\}$ は determinantal variety と呼ばれ，先人の研究により多くの事が知られている（[DEP] などとその文献表を参照）。例えば，

$$\begin{cases} \dim Z=(k-1)(2m-k+1) \\ R\text{ は整閉整域, Cohen-MaCaulay。} \end{cases}$$

ここで noether 環 B に関する性質 (R_k), (S_k) を思いおこそう（[AK; ChIV] 参照）。これは次の性質をみたす。

(a) $(R_{k+1})\Rightarrow(R_k)$, $(S_{k+1})\Rightarrow(S_k)$

(b) B が (R_0), (S_1) をみたす $\Longleftrightarrow$ B が整域

(c) 〃 (R_1), (S_2) 〃 $\Longleftrightarrow$ 〃 整閉整域

(d) 〃 (S_k) $\forall k$ 〃 $\Longleftrightarrow$ 〃 Cohen-MaCaulay

さて $\dim R-\dim A=\dim Z-\dim\overline{O_\alpha}=k-1$ と R が Cohen-MaCaulay で $A=R/(\overline{\varphi}_1,\cdots,\overline{\varphi}_{k-1})$ とかけることから A も Cohen-MaCaulay（[AK; ChIII, 4.5]），特に A は (S_k) を任意の k についてみたす。また $\dim\overline{O_\alpha}-\dim(\overline{O_\alpha}-O_\alpha)\geqq 2$（Lemma 1 (i)）と Lemma 4 から A は (R_1) をみたす。　よって主張が示された。ついでに，この場合 $\overline{O_\alpha}$ が normal かつ Cohen-MaCaulay であることも示された。

§3. 対称群の表現と巾零共役類

$\boxed{3.1}$ Kostantの問題

$$\mathfrak{d} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix} \middle| \, x_i \in \mathbb{C} \right\}$$ とおき，制限写像 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \xrightarrow{res} \mathbb{C}[\mathfrak{d}]$ を

考える（$x_{ij} \mapsto 0$ $(i \neq j)$, $x_{ii} \mapsto x_i$）。$\sigma \in P(n)$ に対して $A_\sigma = \mathbb{C}[\mathfrak{d}]/res(I(\overline{O_\sigma}))$

は，$\mathbb{C}$上有限次元の環になるが，これは次のようにして n次対称群

$\mathfrak{S}_n$ の表現空間にもなる。$\mathfrak{S}_n$ は n個の変数 x_i の置換として $\mathfrak{d}$ に

作用する。よって $\mathbb{C}[\mathfrak{d}]$ に作用する。$I(\overline{O_\sigma})$ は G-不変なので $res(I(\overline{O_\sigma}))$

は$\mathfrak{S}_n$-不変。

「<u>注意</u> $\mathfrak{d}$ と $\overline{O_\sigma}$ のschemeとしてのintersectionが丁度 Spec A_σ になる。」

$\mathfrak{S}_n$-加群としての A_σ を決めよというのが，Kostantの問題である。

答は次のとおり。

「<u>定理5</u>（De Concini - Procesi [DP]，[T1,2]も参照）

$\sigma = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \cdots\cdots)$ とするとき，$\mathfrak{S}_n$-加群として，

$$A_\sigma \simeq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\tau_0} \times \mathfrak{S}_{\tau_1} \times \cdots}^{\mathfrak{S}_n} (1)$$

ここで $\mathfrak{S}_{\tau_0} \times \mathfrak{S}_{\tau_1} \times \cdots$ の $\mathfrak{S}_n$ へのうめこみは自明なもの。」

証明の方針を簡単に述べよう。[Kr]により A_σ が $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\tau_0} \times \mathfrak{S}_{\tau_1} \times \cdots}^{\mathfrak{S}_n} (1)$

と同型な$\mathfrak{S}_n$-部分加群を含むことがわかる（半単純共役類からの

一種の deformation)。よって $\dim A_\sigma \leqq \frac{n!}{\tau_0!\tau_1!\cdots\cdots}$ を示せばよい。

§2.1 の記号で $I_\sigma \subset J(\overline{O_\sigma})$ なので、$\dim(\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathrm{res}(I_\sigma)) \leqq \frac{n!}{\tau_0!\tau_1!\cdots\cdots}$

を示せばよい。これは n に関する帰納法で示される。なお [DP] では

I_σ のかわりに(みかけ上)別の ideal (§2.1の記号では、F_σ で生成される ideal) を

用いているが、[T1,2] のように I_σ を使うほうが証明は簡単である。

詳細は原論文にゆずる。

なお定理5で $\sigma=(n)$ のときは Kostant の定理であることを注意しておく([Ko2])。

3.2 Springer 表現との関係

まず Springer 表現 [Sp] についてもっとも安直な説明をする。

旗多様体 $\mathcal{B} = \{(V_0 \subset V_1 \subset \cdots\cdots \subset V_n) \mid V_i$ は $\mathbb{C}^n$ の i 次元部分空間$\}$ は

$G=GL(n,\mathbb{C})$ の等質空間であるが、unitary 群 $K=U(n)$ の等質空間でもあり、ある一点の K での固定部分群は、

$$T=\left\{\begin{bmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{bmatrix} \middle| \, z_i\in\mathbb{C},\ |z_i|=1\right\}$$

となる。従って $\mathcal{B}$ は K/T と同一視される。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $w_\sigma \in K$

を (w_σ の (i,j)-成分$) = \delta_{i,\sigma(j)}$ (Kronecker のデルタ) で定めると、$\mathfrak{S}_n$ は

K/T に ($\sigma: gT \longrightarrow g\,w_{\sigma^{-1}}T \quad (g\in K)$) で作用する。よって $\mathcal{B}=K/T$ の

cohomology 環 $H^*(\mathcal{B}) = H^*(\mathcal{B},\mathbb{C})$ に $\mathfrak{S}_n$ が作用する。

さて $\sigma \in \mathcal{P}(n)$, $x\in O_\sigma$ のとき、

$$\mathcal{B}^x = \{(V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n) \in \mathcal{B} \mid x\cdot V_i \subset V_i \quad (\forall i)\}$$

とおくと，$\mathcal{B}^x$ は $\mathcal{B}$ の閉部分集合なので自然に $H^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{\varphi_x} H^*(\mathcal{B}^x)$ が定まる。また φ_x は surjective であることが知られている（[HS]）。ここで $\mathcal{B}^x$ 自身は $\mathfrak{S}_n$-不変ではないけれども，Ker φ_x は $\mathfrak{S}_n$-不変であることがわかる（その理由は簡単には説明できない [HS]を参照）。従って $H^*(\mathcal{B}^x)$ は自然に $\mathfrak{S}_n$-加群になる。これを<u>Springer表現</u>という。§3.1と関連して，

「<u>定理6</u>（De Concini-Procesi [DP]，[T1,2]も参照）

$\sigma \in P(n)$，$x \in O_\sigma$ とすると次の図式を可換にする写像 γ_σ が一意的に定まり、これは環として，また $\mathfrak{S}_n$-加群としての同型写像になる。

$$\begin{array}{ccc} A_{(n)} & \xrightarrow[\sim]{\gamma} & H^*(\mathcal{B}) \\ {\scriptstyle \psi_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_x} \\ A_\sigma & \xrightarrow{\gamma_\sigma} & H^*(\mathcal{B}^x) \end{array}$$

ここで ψ_σ は自然な写像。γ もよく知られた自然な同型写像（例えば[BGG]を参照）。」

証明は定理5のときと同じ理由で[T1,2]のほうが[DP]より簡単である。

$\boxed{3.3}$ GL$(n,\mathbb{C})$ 以外の場合

§3.1, §3.2で述べた事は，GL$(n,\mathbb{C})$ 以外の reductive な代数群についても同じ問題が考えられる（$\mathfrak{S}_n$ は Weyl 群で置き換える。）。これについては [T1], [C] に部分的結果がある。

参考文献

〔A〕 Alekseevsky, A. V. : Component groups of centralizer for unipotent elements in semisimple algebraic groups. Trudy Tbiliss. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR 62 (1979), 5-27.

〔AK〕 Altman, A. and Kleiman, S. : Introduction to Grothendieck duality theory. Lecture Notes in Mathematics 146, Berlin-Heiderberg -New York, Springer Verlag (1970).

〔BC〕 Bala, P. and Carter, R. W. : Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 79 (1976), 401-425; 80 (1976), 1-18.

〔BGG〕 Bernstein, I. N., Gel'fand, I. M. and Gel'fand, S. I. : Schubert cells and cohomology of the spaces G/P. Russian Math. Surveys 28 (1973), 1-26.

[BS] Beynon, W. M. and Spaltenstein, N. : Green functions of finite Chevalley groups of type E_n (n=6, 7, 8). J. Alg. 88 (1984), 584-614.

[C] Carrell, J. B. : Regular orbits of the Weyl group and a theorem of De Concini and Procesi. preprint, Vancouver.

[DEP] De Concini, C., Eisenbud, D. and Procesi, C. : Young diagrams and determinantal varieties. Invent. Math. 56 (1980), 129-165.

[DP] De Concini, C. and Procesi, C. : Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety. Invent. Math. 64 (1981), 203-219.

[D] Dynkin, E. B. : Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 6 (1957), 111-245.

[H] Hesselink, W. : Singularities in the nilpotent scheme of a classical group. Trans. Amer. Math. Soc. 222 (1976), 1-32.

[HS] Hotta, R. and Springer, T. A. : A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of the unitary groups. Invent. Math. 41 (1977), 113-127.

[Ko1] Kostant, B. : The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. Amer. J. Math. 81 (1959), 973-1032.

[Ko2] Kostant, B. : Lie group representations in polynomial rings. Amer. J. Math. 85 (1963), 327-404.

[Kr] Kraft, H. : Conjugacy classes and Weyl group representations. Asterisque 87-88 (1981), 195-205.

[KP1] Kraft, H. and Procesi, C. : Closures of conjugacy classes of matrices are normal. Invent. Math. 53 (1979), 227-247.

[KP2] Kraft, H. and Procesi, C. : Minimal singularities in GL_n. Invent. Math. 62 (1981), 503-515.

[KP3] Kraft, H. and Procesi, C. : On the geometry of conjugacy classes in classical groups. Comment. Math. Helvetici 57 (1982), 539-602.

[S1] Shoji, T. : The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of characteristic $p \neq 2$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 21 (1974), 1-17.

[S2] Shoji, T. : On the Green polynomials of a Chevalley group of type F_4. Comm. Alg. 10 (1982), 505-543.

[Sp] Springer, T. A. : Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Invent. Math. 36 (1976), 173-207.

〔T1〕 Tanisaki, T. : Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups. Tohoku J. Math. 34 (1982), 575-585.

〔T2〕 Tanisaki, T. : 巾零行列からなる共役類の閉包の定義 ideal と Weyl 群の表現について。 数理解析研究所講究録 444 (1981), 118-141

〔M1〕 Mizuno, K. : The conjugate classes of Chevalley groups of type E_6. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977), 525-563.

〔M2〕 Mizuno, K. : The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7 and E_8. Tokyo J. Math. 3 (1980), 391-461.

〔W〕 Wall, G. E. : On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups. J. Austr. Math. Soc. 3 (1963), 1-62.